



# Diseño, Implementación y Evaluación de un Modelo de Optimización de Costos en Comunicaciones Telefónicas



Mauricio Notti - Pablo Pilotti - Pablo Speciale

# Objetivos

- Una empresa está interesada en disminuir el monto de facturación mensual en llamadas telefónicas

# Objetivos

- Una empresa está interesada en disminuir el monto de facturación mensual en llamadas telefónicas
- La empresa cuenta con una central telefónica por la que se derivan las llamadas

# Objetivos

- Una empresa está interesada en disminuir el monto de facturación mensual en llamadas telefónicas
- La empresa cuenta con una central telefónica por la que se derivan las llamadas
- La central administra varias líneas, contratadas a empresas diferentes

# Objetivos

- Una empresa está interesada en disminuir el monto de facturación mensual en llamadas telefónicas
- La empresa cuenta con una central telefónica por la que se derivan las llamadas
- La central administra varias líneas, contratadas a empresas diferentes
- Se realizan distintos tipos de llamadas: locales o interurbanas, a teléfonos fijos o móviles, etc

# Objetivos

- Una empresa está interesada en disminuir el monto de facturación mensual en llamadas telefónicas
- La empresa cuenta con una central telefónica por la que se derivan las llamadas
- La central administra varias líneas, contratadas a empresas diferentes
- Se realizan distintos tipos de llamadas: locales o interurbanas, a teléfonos fijos o móviles, etc
- Dependiendo del tipo de la llamada, le central debe elegir la línea más conveniente para hacerla

# Objetivos

- Una empresa está interesada en disminuir el monto de facturación mensual en llamadas telefónicas
- La empresa cuenta con una central telefónica por la que se derivan las llamadas
- La central administra varias líneas, contratadas a empresas diferentes
- Se realizan distintos tipos de llamadas: locales o interurbanas, a teléfonos fijos o móviles, etc
- Dependiendo del tipo de la llamada, le central debe elegir la línea más conveniente para hacerla
- Nuestro objetivo es formalizar este problema y crear un modelo matemático que lo resuelva

# Datos

- Los planes tarifarios de las empresas telefónicas incluyen la siguiente información:



# Datos

- Los planes tarifarios de las empresas telefónicas incluyen la siguiente información:
  - Costo fijo por línea
  - Costo por pulso, que depende de:
    - Banda horario
    - Zona geográfica
    - Destino móvil o fijo
    - Duración del pulso

# Datos

- Los planes tarifarios de las empresas telefónicas incluyen la siguiente información:
  - Costo fijo por línea
  - Costo por pulso, que depende de:
    - Banda horario
    - Zona geográfica
    - Destino móvil o fijo
    - Duración del pulso
- Para estimar el consumo de la empresa se cuenta con el registro de la central que provee información acerca de las llamadas realizadas:

# Datos

- Los planes tarifarios de las empresas telefónicas incluyen la siguiente información:
  - Costo fijo por línea
  - Costo por pulso, que depende de:
    - Banda horario
    - Zona geográfica
    - Destino móvil o fijo
    - Duración del pulso
- Para estimar el consumo de la empresa se cuenta con el registro de la central que provee información acerca de las llamadas realizadas:
  - Duración
  - Fecha y hora
  - Zona geográfica
  - Destino móvil o fijo

# Solución

A partir de la información anterior, es necesario tomar varias decisiones que constituyen la solución del problema

# Solución

A partir de la información anterior, es necesario tomar varias decisiones que constituyen la solución del problema

- ¿Cuántas líneas son necesarias para satisfacer la demanda?

# Solución

A partir de la información anterior, es necesario tomar varias decisiones que constituyen la solución del problema

- ¿Cuántas líneas son necesarias para satisfacer la demanda?
- ¿A qué empresas es conveniente contratar cada línea?

# Solución

A partir de la información anterior, es necesario tomar varias decisiones que constituyen la solución del problema

- ¿Cuántas líneas son necesarias para satisfacer la demanda?
- ¿A qué empresas es conveniente contratar cada línea?
- Dada una línea fija, ¿qué empresa factura las llamadas interurbanas?

# Solución

A partir de la información anterior, es necesario tomar varias decisiones que constituyen la solución del problema

- ¿Cuántas líneas son necesarias para satisfacer la demanda?
- ¿A qué empresas es conveniente contratar cada línea?
- Dada una línea fija, ¿qué empresa factura las llamadas interurbanas?
- ¿Cómo se debe distribuir las llamadas por las diferentes líneas?



# Solución

A partir de la información anterior, es necesario tomar varias decisiones que constituyen la solución del problema

- ¿Cuántas líneas son necesarias para satisfacer la demanda?
- ¿A qué empresas es conveniente contratar cada línea?
- Dada una línea fija, ¿qué empresa factura las llamadas interurbanas?
- ¿Cómo se debe distribuir las llamadas por las diferentes líneas?

Para resolver el problema decidimos crear un modelo de programación lineal entera (IP)

# Diseño

Parámetros o datos del modelo (constantes)

# Diseño

## Parámetros o datos del modelo (constantes)

- El conjunto de empresas telefónicas, que se divide en
  - **Móviles:** telefonía móvil (celular)
  - **FijasLoc:** telefonía fija para llamadas locales
  - **FijasInt:** telefonía fija para llamadas interurbanas

# Diseño

## Parámetros o datos del modelo (constantes)

- El conjunto de empresas telefónicas, que se divide en
  - **Móviles:** telefonía móvil (celular)
  - **FijasLoc:** telefonía fija para llamadas locales
  - **FijasInt:** telefonía fija para llamadas interurbanas
- Tarifas de las empresas de telefonía
  - **CostoFijo<sub>*i*</sub>:** costo fijo de contratar una línea a la empresa *i*
  - **CostoLoc<sub>*h,d,i*</sub>:** costo del pulso local para la empresa *i*
  - **CostoInt<sub>*h,d,z,i*</sub>:** costo del pulso interurbano para la empresa *i*

# Diseño

## Parámetros o datos del modelo (constantes)

- El conjunto de empresas telefónicas, que se divide en
  - **Móviles:** telefonía móvil (celular)
  - **FijasLoc:** telefonía fija para llamadas locales
  - **FijasInt:** telefonía fija para llamadas interurbanas
- Tarifas de las empresas de telefonía
  - **CostoFijo<sub>*i*</sub>:** costo fijo de contratar una línea a la empresa *i*
  - **CostoLoc<sub>*h,d,i*</sub>:** costo del pulso local para la empresa *i*
  - **CostoInt<sub>*h,d,z,i*</sub>:** costo del pulso interurbano para la empresa *i*
- La demanda de pulsos que se debe satisfacer
  - **DemLoc<sub>*h,d*</sub>:** pulsos a consumir en llamadas locales
  - **DemInt<sub>*h,d,z*</sub>:** pulsos a consumir en llamadas interurbanas

# Diseño

Las variables del modelo representan:

# Diseño

Las variables del modelo representan:

- $x_{i,j}$  la cantidad de líneas contratadas a la empresa  $ij$   
Recordar que, en algunos casos, las llamadas interurbanas realizadas a través de una línea pueden ser facturadas por una empresa diferente a la que factura las locales y el costo fijo

# Diseño

Las variables del modelo representan:

- $x_{i,j}$  la cantidad de líneas contratadas a la empresa  $ij$   
Recordar que, en algunos casos, las llamadas interurbanas realizadas a través de una línea pueden ser facturadas por una empresa diferente a la que factura las locales y el costo fijo
- $ConsLoc_{h,d,i,j}$  cantidad de pulsos locales consumidos por las líneas contratadas a la empresa  $ij$



# Diseño

Las variables del modelo representan:

- $x_{i,j}$  la cantidad de líneas contratadas a la empresa  $ij$   
Recordar que, en algunos casos, las llamadas interurbanas realizadas a través de una línea pueden ser facturadas por una empresa diferente a la que factura las locales y el costo fijo
- $ConsLoc_{h,d,i,j}$  cantidad de pulsos locales consumidos por las líneas contratadas a la empresa  $ij$
- $ConsInt_{h,d,z,i,j}$  cantidad de pulsos interurbanos consumidos por las líneas contratadas a la empresa  $ij$

# Diseño

Las variables del modelo representan:

- $x_{i,j}$  la cantidad de líneas contratadas a la empresa  $ij$   
Recordar que, en algunos casos, las llamadas interurbanas realizadas a través de una línea pueden ser facturadas por una empresa diferente a la que factura las locales y el costo fijo
- $ConsLoc_{h,d,i,j}$  cantidad de pulsos locales consumidos por las líneas contratadas a la empresa  $ij$
- $ConsInt_{h,d,z,i,j}$  cantidad de pulsos interurbanos consumidos por las líneas contratadas a la empresa  $ij$

Notar que todas las variables representan magnitudes enteras positivas, es decir que tenemos un problema de **Programación Lineal Entera (Integer Programming)**

# Diseño

Las restricciones son muy intuitivas, por ejemplo

- Todas las variables representan magnitudes enteras positivas
- La cantidad de líneas contratadas debe ser tal, que sea posible cubrir la demanda
- La cantidad total de pulsos consumidos debe cubrir la demanda

# Diseño

Las restricciones son muy intuitivas, por ejemplo

- Todas las variables representan magnitudes enteras positivas
- La cantidad de líneas contratadas debe ser tal, que sea posible cubrir la demanda
- La cantidad total de pulsos consumidos debe cubrir la demanda

**Función Objetivo**

*Minimizar (CostoFijo + CostoLlamadasLocales + CostoLlamadasInterurbanas)*

# Diseño

Las restricciones son muy intuitivas, por ejemplo

- Todas las variables representan magnitudes enteras positivas
- La cantidad de líneas contratadas debe ser tal, que sea posible cubrir la demanda
- La cantidad total de pulsos consumidos debe cubrir la demanda

## Función Objetivo

*Minimizar (CostoFijo + CostoLlamadasLocales + CostoLlamadasInterurbanas)*

- **CostoFijo:** cantidad de líneas contratadas a la empresa  $i$ , por el costo fijo de dicha empresa
- **CostoLlamadasLocales:** cantidad de pulsos consumidos en llamadas locales, por el costo correspondiente
- **CostoLlamadasInterurbanas:** cantidad de pulsos consumidos en llamadas interurbanas, por el costo correspondiente

# Herramientas

Las herramientas utilizadas son:

# Herramientas

Las herramientas utilizadas son:

- **CPLEX:** Es una herramienta para la resolución de problemas de programación lineal, entera y mixta. Cplex requiere que los problemas estén escritos en un lenguaje que es poco expresivo. Por tal razón, se utilizó un lenguaje de nivel más alto (con mayor expresividad), descripto a continuación.

# Herramientas

Las herramientas utilizadas son:

- **Cplex**: Es una herramienta para la resolución de problemas de programación lineal, entera y mixta. Cplex requiere que los problemas estén escritos en un lenguaje que es poco expresivo. Por tal razón, se utilizó un lenguaje de nivel más alto (con mayor expresividad), descripto a continuación.
- **OPL** (Optimization Programming Language): es un lenguaje de modelado para programación matemática.



# Herramientas

Las herramientas utilizadas son:

- **CPLEX:** Es una herramienta para la resolución de problemas de programación lineal, entera y mixta. Cplex requiere que los problemas estén escritos en un lenguaje que es poco expresivo. Por tal razón, se utilizó un lenguaje de nivel más alto (con mayor expresividad), descripto a continuación.
- **OPL** (Optimization Programming Language): es un lenguaje de modelado para programación matemática.
- **OPL SCRIPT:** Es el lenguaje de script asociado a OPL. Un lenguaje de modelado es generalmente extendido por un lenguaje de comandos que hace posible interactuar con modelos, resolver varias instancias de un mismo modelo, o resolver secuencias de ellos.

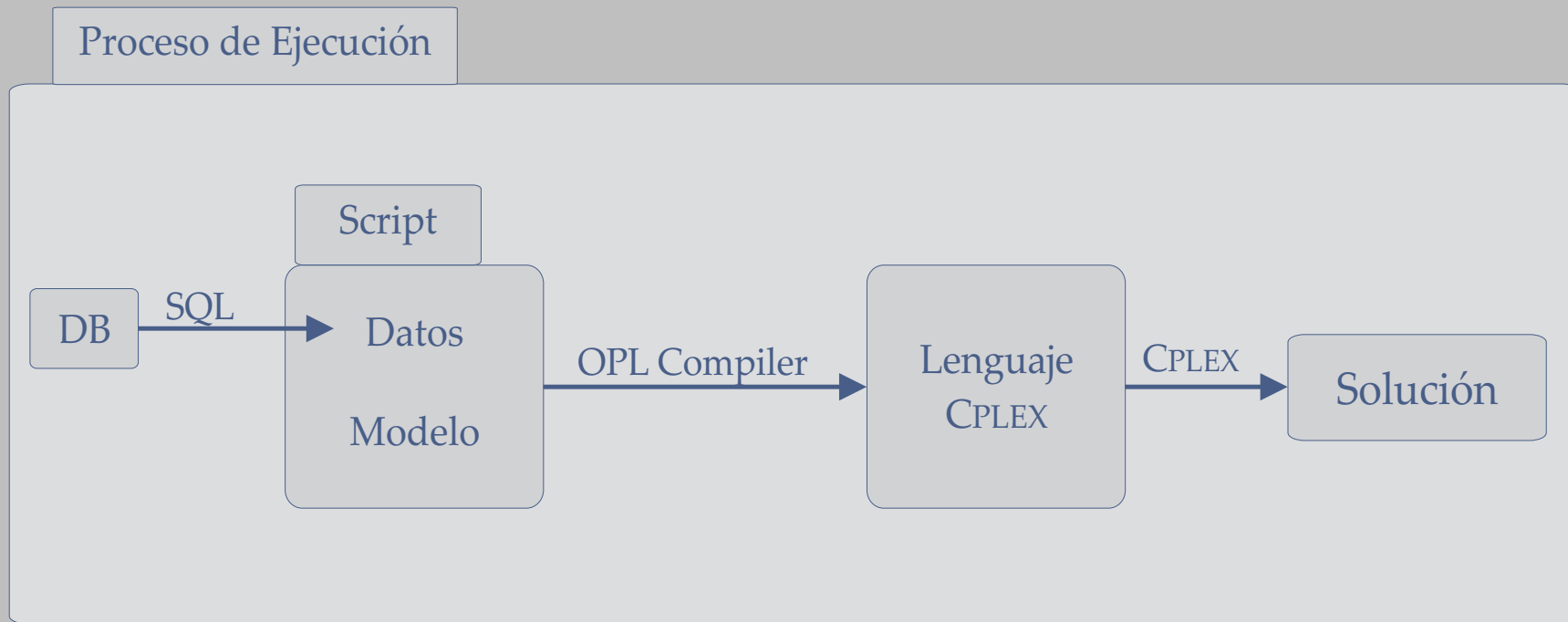
# Herramientas

Las herramientas utilizadas son:

- **Cplex**: Es una herramienta para la resolución de problemas de programación lineal, entera y mixta. Cplex requiere que los problemas estén escritos en un lenguaje que es poco expresivo. Por tal razón, se utilizó un lenguaje de nivel más alto (con mayor expresividad), descrito a continuación.
- **OPL** (Optimization Programming Language): es un lenguaje de modelado para programación matemática.
- **OPL SCRIPT**: Es el lenguaje de script asociado a OPL. Un lenguaje de modelado es generalmente extendido por un lenguaje de comandos que hace posible interactuar con modelos, resolver varias instancias de un mismo modelo, o resolver secuencias de ellos.
- **SQL** (Structured Query Language): permite la manipulación de los datos de una base de datos (DB).

# Implementación

Las herramientas fueron combinadas de la siguiente forma:



# Evaluación

## Adaptación de los Planes Tarifarios

# Evaluación

## Adaptación de los Planes Tarifarios

Empresa de telefonía  $E$

Tarifa: \$  $pl$  por dos minutos si la llamada es local.  
\$  $pi$  por minuto si la llamada es interurbana.

# Evaluación

## Adaptación de los Planes Tarifarios

Empresa de telefonía  $E$

Tarifa: \$  $p_l$  por dos minutos si la llamada es local.  
\$  $p_i$  por minuto si la llamada es interurbana.

Es decir, si se realiza una llamada local de  $L$  minutos y una interurbana de  $I$  minutos, la empresa  $E$  facturaría:  
 $p_l \lceil \frac{L}{2} \rceil + p_i \lceil I \rceil$  pesos.

# Evaluación

Supongamos ahora que existen cuatro empresas que se comportan de la siguiente manera:

Empresa	Costo llamada local	Costo llamada Interurbana
$A_1$	$\$ \frac{pl}{2}$ por minuto	$\$ pi$ por minuto
$A_2$	$\$ pl$ por minuto	$\$ pi$ por minuto
$B_1$	$\$ pl$ por dos minutos	$\$ pi$ por dos minutos
$B_2$	$\$ pl$ por dos minutos	$\$ 2 pi$ por dos minutos

# Evaluación

Supongamos ahora que existen cuatro empresas que se comportan de la siguiente manera:

Empresa	Costo llamada local	Costo llamada Interurbana
$A_1$	$\$ \frac{pl}{2}$ por minuto	$\$ pi$ por minuto
$A_2$	$\$ pl$ por minuto	$\$ pi$ por minuto
$B_1$	$\$ pl$ por dos minutos	$\$ pi$ por dos minutos
$B_2$	$\$ pl$ por dos minutos	$\$ 2 pi$ por dos minutos

Dado que:

$$\frac{pl}{2} [L] \leq pl \left[\frac{L}{2}\right] \leq pl [L] \quad y \quad pi \left[\frac{I}{2}\right] \leq pi [I] \leq 2 pi \left[\frac{I}{2}\right]$$

podemos concluir que la facturación de la empresa  $E$  está acotada entre la facturación de las empresas  $A_1$  y  $A_2$ , y también entre la facturación de las empresas  $B_1$  y  $B_2$ .



# Evaluación

## Primer Caso

Objetivo Comparar el resultado del modelo con la realidad reflejada por el registro de llamadas.

# Evaluación

## Primer Caso

**Objetivo** Comparar el resultado del modelo con la realidad reflejada por el registro de llamadas.

**Característica** Una empresa de telefonía fija y otra de telefonía móvil, sin costos fijos. Demanda total: 93000 minutos.

# Evaluación

## Primer Caso

**Objetivo** Comparar el resultado del modelo con la realidad reflejada por el registro de llamadas.

**Característica** Una empresa de telefonía fija y otra de telefonía móvil, sin costos fijos. Demanda total: 93000 minutos.

**Solución** Las cuatro aproximaciones responden con la misma solución: 12 líneas con la empresa de telefonía fija y 5 con la de telefonía móvil. Las cotas mas ajustadas son A1 y A2. Apartir del valor de estas cotas concluimos que el costo será \$7974 con un error del 7,15 %.

# Evaluación

## Primer Caso

**Objetivo** Comparar el resultado del modelo con la realidad reflejada por el registro de llamadas.

**Característica** Una empresa de telefonía fija y otra de telefonía móvil, sin costos fijos. Demanda total: 93000 minutos.

**Solución** Las cuatro aproximaciones responden con la misma solución: 12 líneas con la empresa de telefonía fija y 5 con la de telefonía móvil. Las cotas mas ajustadas son A1 y A2. Apartir del valor de estas cotas concluimos que el costo será \$7974 con un error del 7,15 %.

**Conclusión** Comparando estos resultados con la solución obtenida por la compañía. Se observa que la decisión que toma el modelo sobre el número de líneas que deben contratarse a cada empresa, y el costo asociado a las llamadas, se ajustan razonablemente a la realidad.

# Evaluación

## Segundo Caso

Objetivo Se intenta evaluar el comportamiento del modelo analizando en mayor detalle los resultados.

# Evaluación

## Segundo Caso

**Objetivo** Se intenta evaluar el comportamiento del modelo analizando en mayor detalle los resultados.

**Característica** Se consideran los costos fijos. Se incluye otra empresa de telefonía fija y se mantiene la misma demanda.

# Evaluación

## Segundo Caso

**Objetivo** Se intenta evaluar el comportamiento del modelo analizando en mayor detalle los resultados.

**Característica** Se consideran los costos fijos. Se incluye otra empresa de telefonía fija y se mantiene la misma demanda.

**Solución** Las cotas mas ajustadas son A1 y A2. La cantidad de lineas contratadas es la misma, pero existen diferencias en las empresas elegidas.

# Evaluación

## Segundo Caso

**Objetivo** Se intenta evaluar el comportamiento del modelo analizando en mayor detalle los resultados.

**Característica** Se consideran los costos fijos. Se incluye otra empresa de telefonía fija y se mantiene la misma demanda.

**Solución** Las cotas mas ajustadas son A1 y A2. La cantidad de lineas contratadas es la misma, pero existen diferencias en las empresas elegidas.

**Conclusión** Después de un análisis de los resultados, se verificó la correctitud de la salida. Finalmente para determinar cuál de las configuraciones definidas por A1 y A2 es más conveniente aplicar, es necesario contar con más información acerca del comportamiento de la empresa en cuanto a las llamadas locales.



# Evaluación

## Tercer Caso

Objetivo Continuar analizando en detalle el modelo y evaluar la performance.

# Evaluación

## Tercer Caso

Objetivo Continuar analizando en detalle el modelo y evaluar la performance.

Característica Este caso es similar al segundo, sólo que se aumentó diez veces la demanda de llamadas locales a teléfonos fijos.

# Evaluación

## Tercer Caso

Objetivo Continuar analizando en detalle el modelo y evaluar la performance.

Característica Este caso es similar al segundo, sólo que se aumentó diez veces la demanda de llamadas locales a teléfonos fijos.

Solución Las cotas mas ajustadas son B1 y B2.

# Evaluación

## Tercer Caso

**Objetivo** Continuar analizando en detalle el modelo y evaluar la performance.

**Característica** Este caso es similar al segundo, sólo que se aumentó diez veces la demanda de llamadas locales a teléfonos fijos.

**Solución** Las cotas mas ajustadas son B1 y B2.

**Conclusión** Este comportamiento es consecuencia del aumento en las llamadas locales a teléfonos fijos, ya que éstas son las que se cobran en pulsos de 120 segundos y por lo tanto disminuye el error relativo de las cotas B1 y B2. La diferencia entre los costos de los pulsos locales en horario normal es tan pequeña, que el costo fijo es determinante en la decisión de las empresas. Por otro lado no se detectó disminución de performance a pesar del aumento de la demanda.

# Conclusiones

- El modelo presentado constituye una herramienta útil para la resolución del problema planteado.

# Conclusiones

- El modelo presentado constituye una herramienta útil para la resolución del problema planteado.
- Mostró un comportamiento eficiente. Esto hace que se pueda estimar rápidamente la contratación que más beneficia a la empresa, aprovechando de este modo los constantes cambios de las propuestas tarifarias.

# Conclusiones

- El modelo presentado constituye una herramienta útil para la resolución del problema planteado.
- Mostró un comportamiento eficiente. Esto hace que se pueda estimar rápidamente la contratación que más beneficia a la empresa, aprovechando de este modo los constantes cambios de las propuestas tarifarias.
- La respuesta incluye parámetros para que la central efectúe una distribución adecuada de pulsos sobre las diferentes líneas.

# Conclusiones

- El modelo presentado constituye una herramienta útil para la resolución del problema planteado.
- Mostró un comportamiento eficiente. Esto hace que se pueda estimar rápidamente la contratación que más beneficia a la empresa, aprovechando de este modo los constantes cambios de las propuestas tarifarias.
- La respuesta incluye parámetros para que la central efectúe una distribución adecuada de pulsos sobre las diferentes líneas.
- Por último, cabe resaltar que ante un aumento importante en la demanda el modelo mantiene una buena performance.



¿Preguntas?

**Gracias**



# Diseño, Implementación y Evaluación de un Modelo de Optimización de Costos en Comunicaciones Telefónicas



Mauricio Notti - Pablo Pilotti - Pablo Speciale