Simulación de Sistemas Continuos.

Principios básicos y algunos avances recientes.

Ernesto Kofman

Laboratorio de Sistemas Dinámicos y Procesamiento de la Información
FCEIA - UNR. CONICET

Organización de la Presentación

1. Sistemas Continuos y Ecuaciones Diferenciales
   - Conceptos Básicos
   - Ejemplo Introductorio
   - Ecuaciones de Estado
2. Métodos de Integración Numérica
   - Introducción
   - Características de los Métodos
   - Algunas Dificultades
1. Métodos de Integración por Cuantificación
   - Introducción
   - Sistemas Cuantificados y DEVS
   - Métodos de QSS

Sistemas Continuos

Son sistemas cuyas variables evolucionan de forma continua en el tiempo

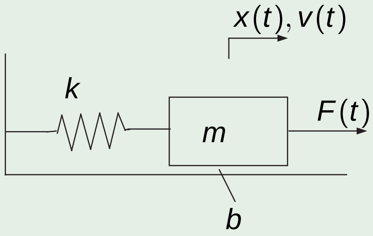
Esto incluye:

- sistemas físicos (mecánicos, eléctricos, hidráulicos, etc.),
- procesos químicos,
- dinámica de poblaciones,
- algunos modelos económicos,
- etc.

Estos sistemas pueden en general modelarse mediante Ecuaciones Diferenciales.

Sistemas Continuos – Ejemplo

Sistema Masa–Resorte



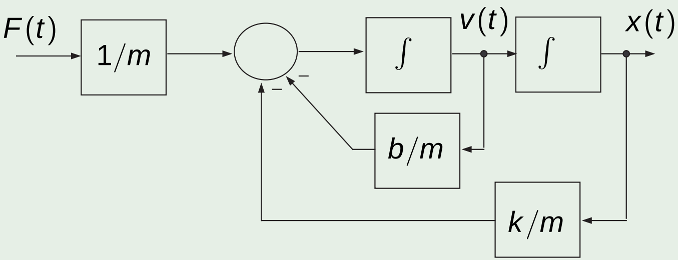
Modelo del sistema (de segundo orden):

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{m}[-k\,x(t) - b\,v(t) + F(t)]$$

Sistemas Continuos – Ejemplo (cont)

Diagrama de Bloques



$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= v(t) \\
\dot{v}(t) &= -\frac{k}{m}x(t) - \frac{b}{m}v(t) + \frac{1}{m}F(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Sistemas Continuos – Ejemplo (cont)

Si nos interesa predecir el comportamiento del sistema, debemos resolver la Ecuación Diferencial (20).

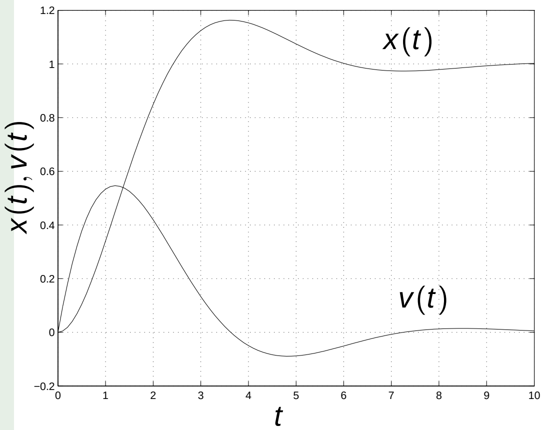
Por ejemplo, para los parámetros $k = b = m = 1$, tomando $F(t) = 1$ para $t \geq 0$ y las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $v(0) = 0$, la solución analítica está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ v(t) &= \frac{\sqrt{12}}{3} e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \end{aligned} \tag{2}$$

para todo $t \geq 0$

Sistemas Continuos – Ejemplo (cont)

Solución de la Ecuación (20)



Sistemas Continuos – Ecuaciones de Estado

En general, los sistemas continuos con parámetros concentrados pueden describirse mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.(EDOs)

De aquí en más, escribiremos las EDOs como Ecuaciones de Estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \cdots, x_n(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \cdots, x_n(t), t) \end{aligned} \tag{3}$$

donde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se denominan variables de estado y n es el orden del sistema.

Sistemas Continuos – Solución de las EDOs

La Ecuación de Estados (en forma vectorial)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \tag{4}$$

con condición inicial

$$x(t_0) = x_0 \tag{5}$$

en general no puede resolverse de manera analítica (salvo en casos lineales o algunos casos no lineales muy simples).

Por este motivo, para conocer la evolución de las variables del sistema $x_i(t)$ debe recurrirse a la integración numérica.

Métodos de Integración Numérica

Consideremos el sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \tag{6}$$

con la condición inicial $x(t_0) = x_0$ conocida.

El objetivo de los métodos de integración numérica es obtener una solución aproximada en los instantes de tiempo $t_1, t_2, \cdots, t_N$.

$$\tilde{x}_1 \approx x(t_1),\ \tilde{x}_2 \approx x(t_2), \cdots, \tilde{x}_N \approx x(t_N),$$

La distancia $h_k \triangleq t_{k+1} - t_k$ se denomina paso de integración, y puede ser constante o variable, según el método.

Método de Euler

Aproximando la derivada por el cociente incremental, puede escribirse

$$\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \approx \dot{x}(t_k) = f(x(t_k), t_k)$$

Tomando $h \triangleq t_{k+1} - t_k$ (h fijo) puede despejarse

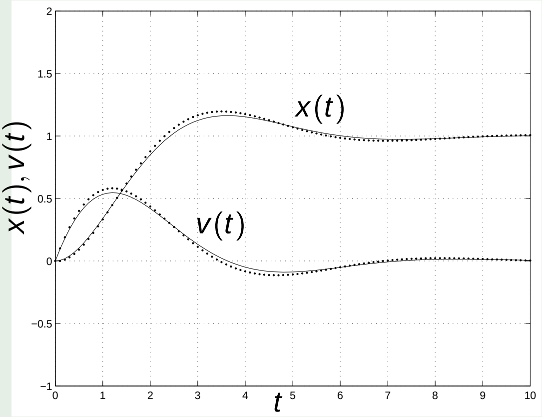
$$x_{k+1} = x_k + h\, f(x_k, t_k) \tag{7}$$

Luego, conociendo x_0, pueden obtenerse $x_1, x_2, \cdots, x_N$ de forma iterativa.

La fórmula de Euler (7) define una Ecuación en Diferencias (Sistema de Tiempo Discreto).

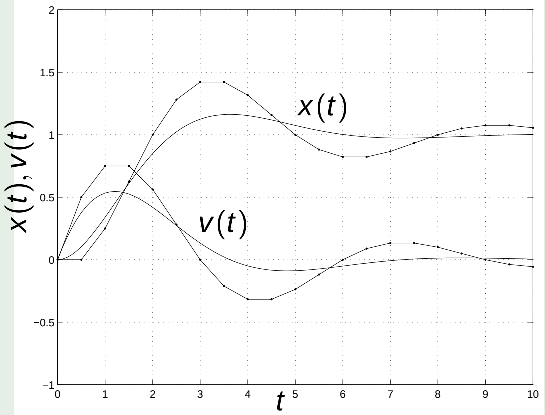
Método de Euler – Ejemplo

Solución con Euler de la Ecuación (20) ($h = 0.1$)



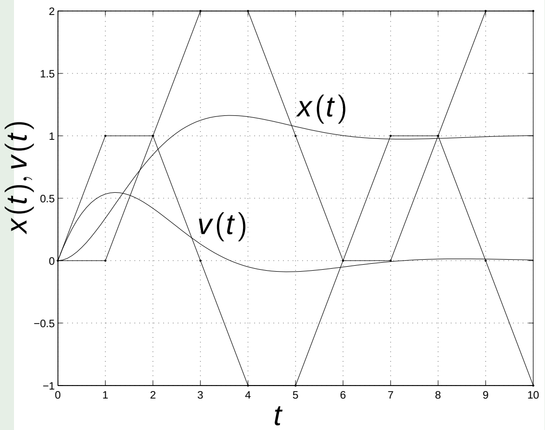
Método de Euler – Ejemplo

Solución con Euler de la Ecuación (20) ($h = 0.5$)



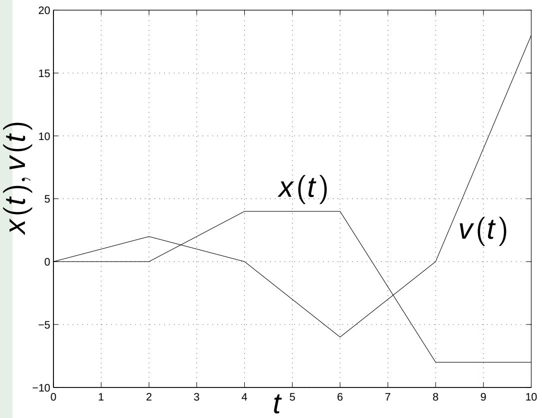
Método de Euler – Ejemplo

Solución con Euler de la Ecuación (20) ($h = 1$)



Método de Euler – Ejemplo

Solución con Euler de la Ecuación (20) ($h = 2$)



Error y Estabilidad Numérica

En todos los casos, la solución numérica tuvo un error apreciable.

El error local por truncamiento es el que se comete de un paso al siguiente. En general aumenta al aumentar el paso h.

Además, con $h = 2$ la solución numérica se tornó inestable.

Una solución es numéricamente estable si no diverge cuando $k \to \infty$

Es deseable que la estabilidad numérica coincida con la estabilidad analítica de la solución. Evidentemente, en el método de Euler esto depende del paso h.

Orden de Precisión

La expansión en serie de Taylor de la solución exacta de la EDO (6) en torno a x_k es:

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f(x_k, t_k) + \frac{h^2}{2!}\frac{df}{dt}(x_k, t_k) + \frac{h^3}{3!}\frac{d^2 f}{dt^2}(x_k, t_k) + \ldots \quad (8)$$

El orden de precisión de un método es la máxima potencia de h hasta la cual coinciden las soluciones exacta y numérica.

El método de Euler es entonces un método de primer orden

Cuanto mayor es el orden de un método, menor es el error local por truncamiento.

Métodos Monopaso

Son métodos que calculan x_{k+1} utilizando únicamente información sobre x_k. (Métodos de Runge–Kutta)

- Forward Euler (primer orden):

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f(x_k, t_k)$$

- Backward Euler (primer orden):

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f(x_{k+1}, t_{k+1})$$

- Regla Trapezoidal (segundo orden):

$$x_{k+1} = x_k + 0.5 \cdot h \cdot [f(x_{k+1}, t_{k+1}) + f(x_k, t_k)]$$

- Heun (segundo orden):

$$k_1 = f(x_k, t_k),\ k_2 = f(x_k + h \cdot k_1, t_k + h),\ x_{k+1} = x_k + 0.5 \cdot h \cdot (k_1 + k_2)$$

Métodos Multipaso

Son métodos que calculan x_{k+1} utilizando información sobre x_k y sobre algunos puntos anteriores (x_{k-1}, etc).

- Adams–Bashforth 3 (tercer orden):

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{12}(23 \cdot f_k - 16 \cdot f_{k-1} + 5 \cdot f_{k-2})$$

- Backward Difference Formulae (BDF) 3 (tercer orden):

$$x_{k+1} = \frac{18}{11}x_k - \frac{9}{11}x_{k-1} + \frac{2}{11}x_{k-2} + \frac{6}{11}h \cdot f_{k+1}$$

Nota: llamamos $f_k \triangleq f(x_k, t_k)$.

Métodos Implícitos

Los métodos implícitos utilizan información del futuro para calcular x_{k+1}, y por lo tanto requieren resolver una ecuación en cada paso.

Los métodos de Backward Euler, la Regla Trapezoidal y BDF3 son ejemplos de métodos implícitos.

Los métodos implícitos tienen grandes ventajas en relación a la estabilidad numérica.

Como contrapartida, su implementación requiere de algoritmos iterativos para resolver la ecuación implícita en cada paso.

Control de Paso

En muchos casos, los métodos se implementan con un algoritmo de control de paso automático:

1. Con dos métodos de orden distinto se da un paso h hacia adelante.
2. Se estima el error como la diferencia entre los dos valores.
3. Si el error estimado es menor que el error tolerado, se acepta el paso y se aumenta el valor de h para el siguiente paso.
4. Si por el contrario, el error es mayor que el tolerado, se disminuye el valor de h y se repite el paso.

Con esta idea se puede controlar el paso de integración h en función de una tolerancia de error preestablecida.

Sistemas Stiff (Rígidos)

Son sistemas que contienen simultáneamente dinámica lenta y dinámica rápida.

En principio, la idea sería usar un paso chico al comienzo y luego agrandarlo cuando la dinámica rápida desaparece.

El problema es que los métodos explícitos se tornan numéricamente inestables al agrandar el paso h.

Por esto, con los sistemas stiff deben utilizarse exclusivamente métodos implícitos provistos de algoritmos de control de paso.

Sistemas Marginalmente Estables

Son sistemas que están en el límite de la estabilidad analítica.

Ej: el sistema masa resorte (20) sin fricción ($b = 0$), sistemas de dinámica celeste, etc. En estos casos:

- Los métodos explícitos resultan numéricamente inestables.
- Los métodos implícitos en general resultan numéricamente estables.

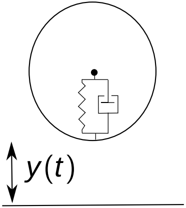
Se necesita utilizar métodos implícitos especiales denominados F–estables como la Regla Trapezoidal

Sistemas Discontinuos

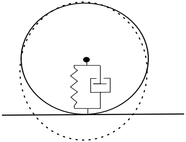
Un modelo simple de una pelota que cae y rebota contra el piso es el siguiente:

$$\dot{y}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = \begin{cases} -g & \text{si } y(t) > 0 \\ -g - \frac{k}{m} \cdot y(t) - \frac{b}{m} \cdot v(t) & \text{si } y(t) \leq 0 \end{cases}$$



Esta EDO tiene una discontinuidad en $y = 0$.



Los métodos de integración pueden cometer errores inaceptables. Es necesario detectar los instantes en que $y(t) = 0$ y recomenzar la simulación a partir de allí.

Bibliografía sobre Métodos de Integración

F. Cellier y E. Kofman.
Continuous System Simulation.
Springer, New York, 2006.

E. Hairer, S.Ñorsett, y G. Wanner.
Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems.
Springer, 2nd edición, 1993.

E. Hairer y G. Wanner.
Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential–Algebraic Problems.
Springer, 1st edición, 1991.

Ejemplo Introductorio

Consideremos el sistema de segudo orden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) \end{aligned} \tag{9}$$

y la siguiente *aproximación*:

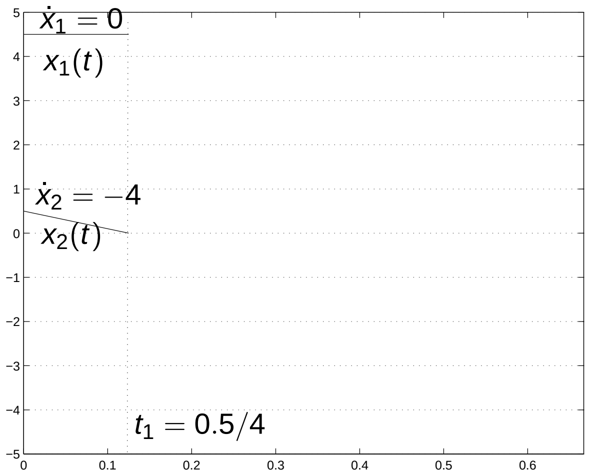
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \text{floor}(x_2(t)) = q_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\text{floor}(x_1(t)) = -q_1(t) \end{aligned} \tag{10}$$

Ejemplo Introductorio

La Ecuación

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= q_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -q_1(t)\end{aligned}$$

puede resolverse. Consideremos las c.i. $x_1(0) = 4.5$, $x_2(0) = 0.5$:

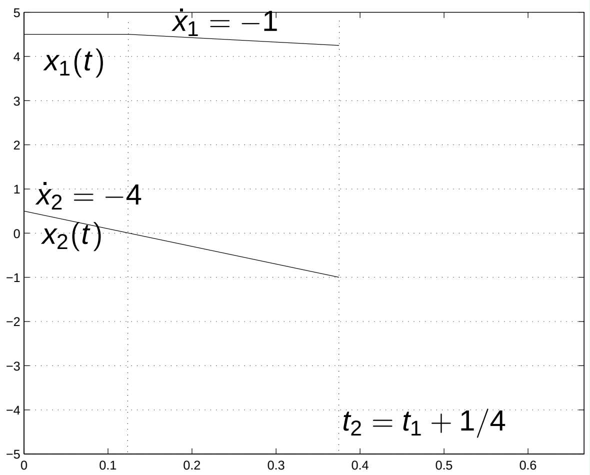


Ejemplo Introductorio

La Ecuación

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= q_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -q_1(t)\end{aligned}$$

puede resolverse. Consideremos las c.i. $x_1(0) = 4.5$, $x_2(0) = 0.5$:

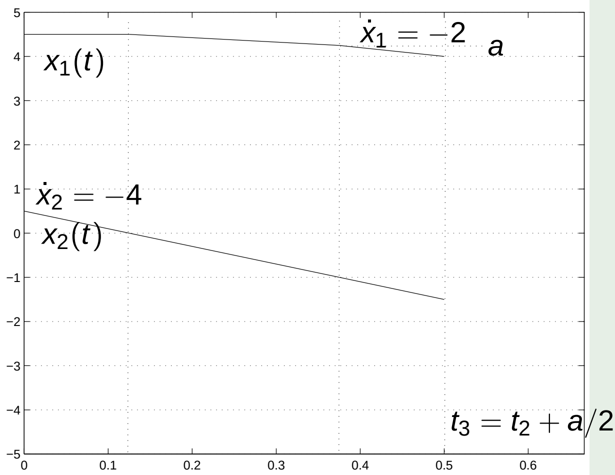


Ejemplo Introductorio

La Ecuación

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= q_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -q_1(t)\end{aligned}$$

puede resolverse. Consideremos las c.i. $x_1(0) = 4.5$, $x_2(0) = 0.5$:

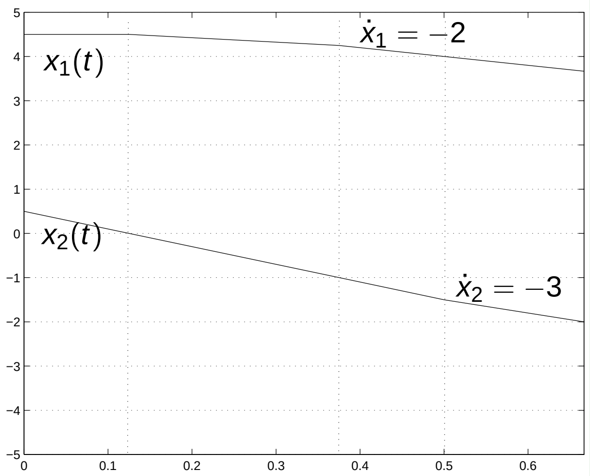


Ejemplo Introductorio

La Ecuación

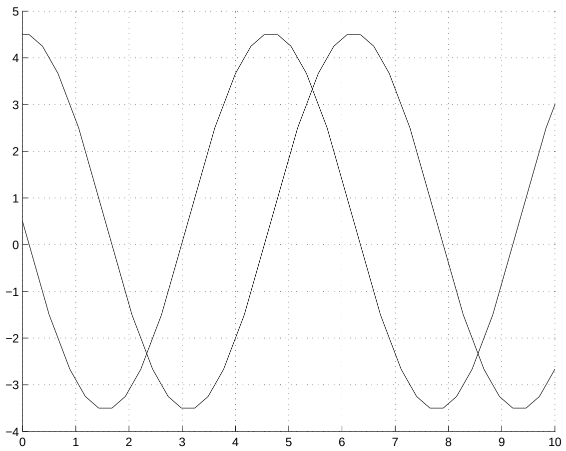
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -q_1(t) \end{aligned}$$

puede resolverse. Consideremos las c.i. $x_1(0) = 4.5$, $x_2(0) = 0.5$:



Ejemplo Introductorio

Solución del Sistema Cuantificado



Sistemas Cuantificados y DEVS.

A diferencia de los métodos de integración vistos, el sistema aproximado (10) no puede escribirse como una Ecuación en Diferencias:

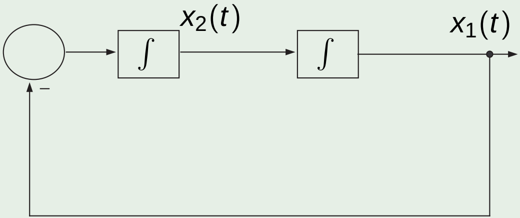
$$x(t_{k+1}) = f(x(t_k), t_k)$$

Como veremos, los Sistemas Cuantificados son equivalentes a modelos de Eventos Discretos DEVS

$$M = (X, Y, S, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta)$$

Sistemas Cuantificados y DEVS

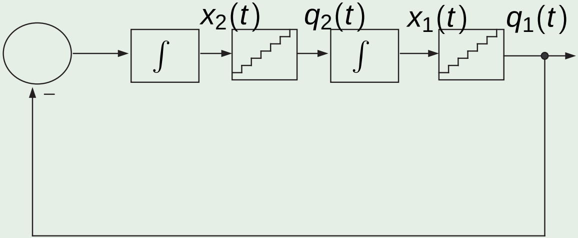
Diagrama de bloques del Sistema (11)



$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) \end{aligned} \tag{11}$$

Sistemas Cuantificados y DEVS

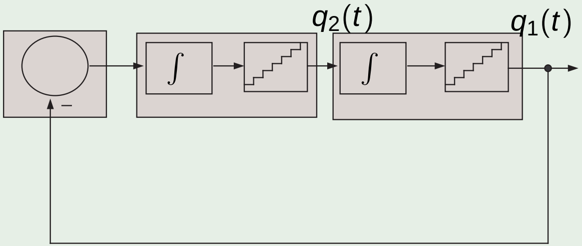
Diagrama de bloques del Sistema (12)



$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -q_1(t) \end{aligned} \tag{12}$$

Sistemas Cuantificados y DEVS

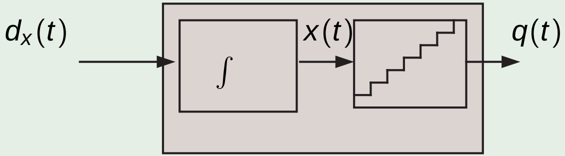
Modelo DEVS Equivalente a (12)



$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -q_1(t) \end{aligned} \qquad (12)$$

Integrador Cuantificado

Integrador Cuantificado

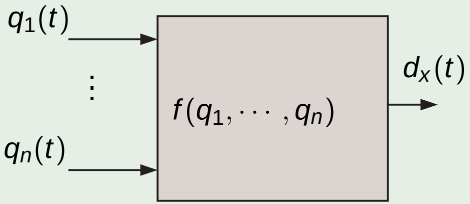


Notar que la salida del bloque es seccionalmente constante. Si consideramos además que la entrada tambén lo es, podemos pensar dichas trayectorias como secuencias de eventos.

El comportamiento del integrador cuantificado puede representarse por un modelo DEVS elemental.

Funciones Estáticas

Función Estática



Si la entrada es seccionalmente constante, la salida también lo será.

El comportamiento de una función estática también puede representarse mediante un modelo DEVS elemental.

Sistemas Cuantificados y DEVS

Dado un sistema continuo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{13}$$

el sistema cuantificado

$$\dot{x}(t) = f(q(t), u(t)) \tag{14}$$

es equivalente a un DEVS y en principio podría simularse acoplando integradores cuantificados y funciones estáticas.

Esta es la idea original de Bernard Zeigler para simular EDOs mediante Sistemas Cuantificados.

Sistemas Cuantificados y DEVS

Dado un sistema continuo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{13}$$

el sistema cuantificado

$$\dot{x}(t) = f(q(t), u(t)) \tag{14}$$

es equivalente a un DEVS y en principio podría simularse acoplando integradores cuantificados y funciones estáticas.

Esta es la idea original de Bernard Zeigler para simular EDOs mediante Sistemas Cuantificados.

Sistemas Cuantificados – Problema

Desafortunadamente, esta idea no funciona debido a la aparición de oscilaciones infinitamente rápidas.

Analicemos por ejemplo lo que ocurre con el sistema cuantificado

$$\dot{x}(t) = -floor(x(t)) - 0.5 \tag{15}$$

con $x(0) = 0$.

Esto se puede solucionar agregando histéresis a la cuantificación, lo que resulta en el Método de QSS.

Sistemas Cuantificados – Problema

Desafortunadamente, esta idea no funciona debido a la aparición de oscilaciones infinitamente rápidas.

Analicemos por ejemplo lo que ocurre con el sistema cuantificado

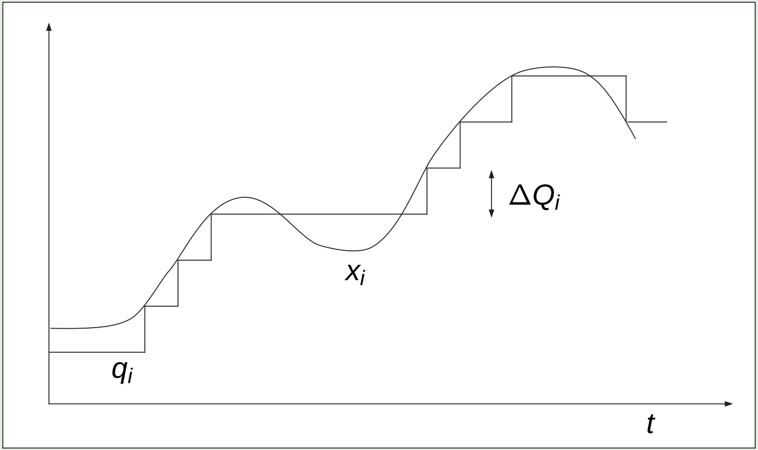
$$\dot{x}(t) = -floor(x(t)) - 0.5 \tag{15}$$

con $x(0) = 0$.

Esto se puede solucionar agregando histéresis a la cuantificación, lo que resulta en el Método de QSS.

Método de QSS

Función de Cuantificación con Histéresis



Método de QSS

Definición

Dado un sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{16}$$

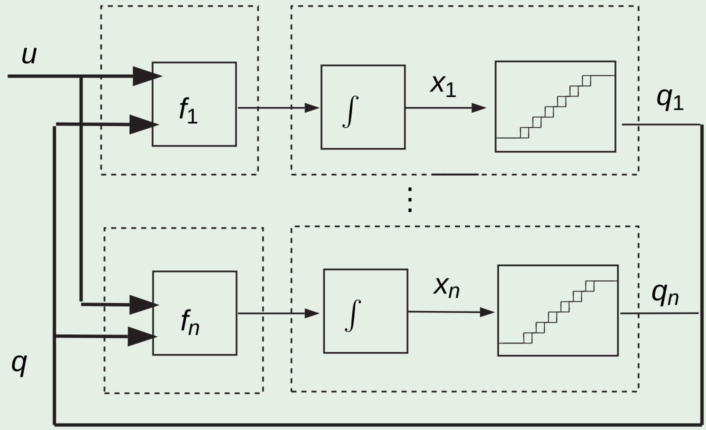
con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, la aproximación QSS está dada por

$$\dot{x}(t) = f(q(t), u(t)) \tag{17}$$

donde $q(t)$ y $x(t)$ están vinculadas componente a componente por funciones de cuantificación con histéresis.

El QSS (17) es equivalente a un modelo DEVS *Legítimo*.

QSS – Diagrama de Bloques



Propiedades de QSS

Definiendo $\Delta x(t) \triangleq q(t) - x(t)$, la Ec.(17) puede reescribirse como

$$\dot{x}(t) = f(x(t) + \Delta x(t), u(t))$$

que es muy similar a (16), excepto por la perturbación acotada Δx. Luego resulta:

- Convergencia: El error tiende a 0 cuando la cuantificación $\Delta Q \to 0$.
- Estabilidad *práctica*: Cuando el sistema original es estable, las soluciones quedan en un entorno del punto de equilibrio.
- **Cota de Error Global Calculable!**: En sistemas lineales, se puede acotar el error cometido en función de la cuantificación.

QSS – Ejemplo

La aproximación QSS del sistema masa resorte (20) puede escribirse como

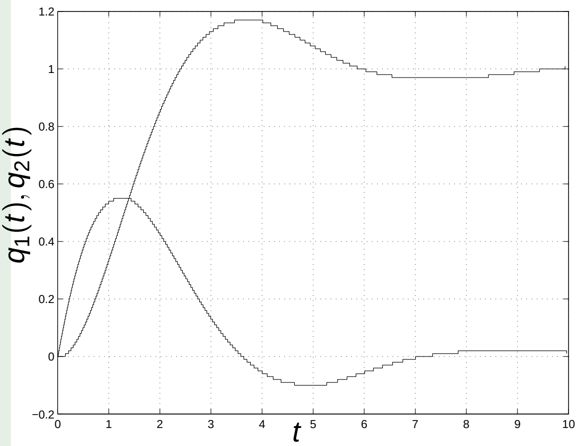
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m} q_1(t) - \frac{b}{m} q_2(t) + \frac{1}{m} F(t) \end{aligned} \tag{18}$$

Para los parámetros utilizados ($m = b = k = 1$), la cota de error global puede calcularse como

$$\begin{bmatrix} |e_1(t)| \\ |e_2(t)| \end{bmatrix} \leq 2.3094 \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_1 + \Delta Q_2 \\ \Delta Q_1 + \Delta Q_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

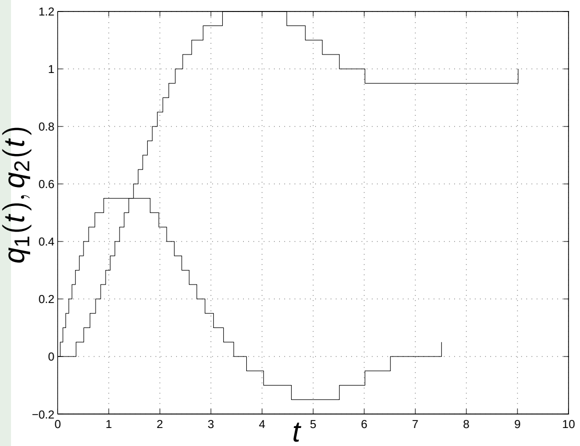
QSS – Ejemplo

Solución con $\Delta Q = 0.01$



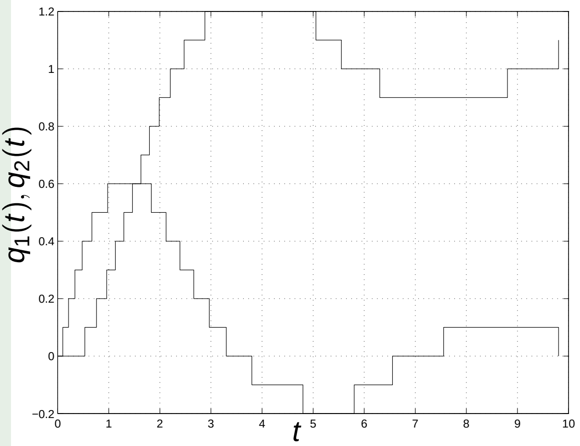
QSS – Ejemplo

Solución con $\Delta Q = 0.05$



QSS – Ejemplo

Solución con $\Delta Q = 0.1$



QSS – Características

Ventajas

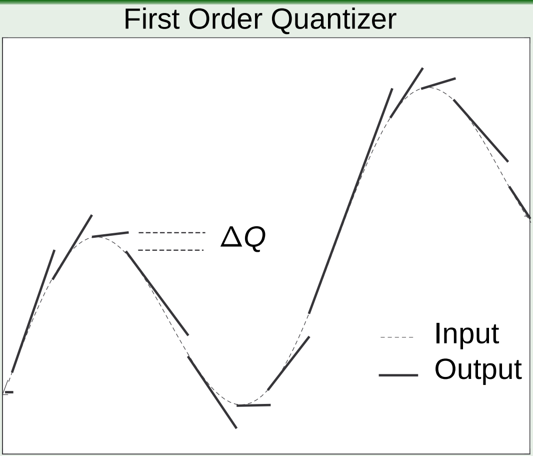
- Estabilidad y Cota de Error.
- Descentralización (sólo cálculos locales). Explota ralitud
- Grandes ventajas para simular sistemas discontinuos

Desventajas

- Aparición de oscilaciones. Problemas en sistemas stiff.
- Necesidad de elegir el quantum.
- El número de pasos crece linealmente con la precisión.

Método de QSS2

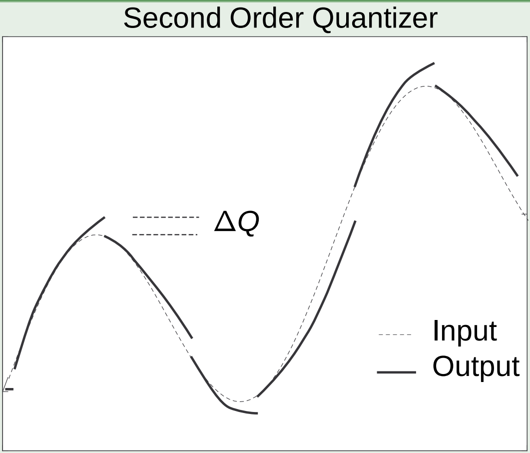
Cuantificación de primer orden



- Mismas propiedades y ventajas que QSS.
- Método de segundo orden.
- El número de pasos crece con la raíz cuadrada de la precisión.

Método de QSS3

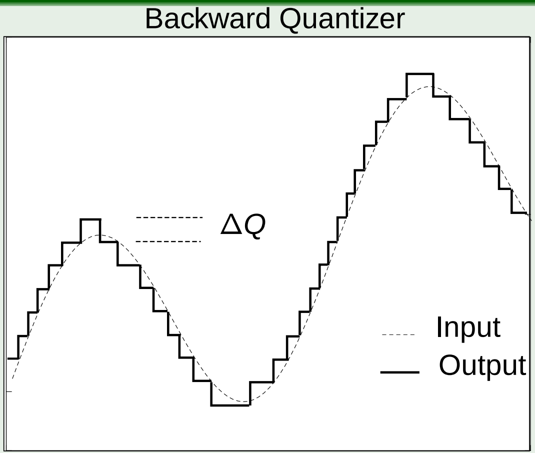
Cuantificación de segundo orden



- Mismas propiedades y ventajas que QSS.
- Método de tercer orden.
- El número de pasos crece con la raíz cúbica de la precisión.

Método de Backward QSS

Cuantificación *Backward*

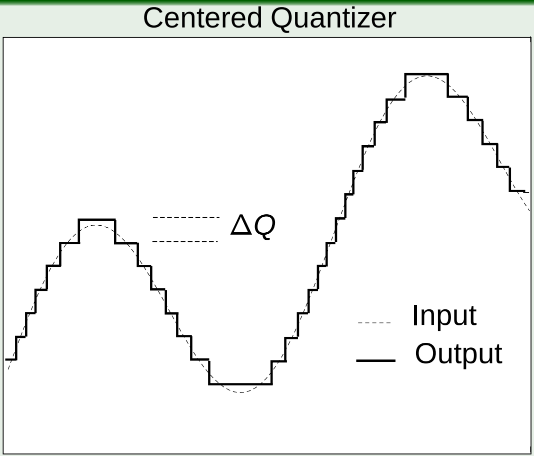


BQSS:

- Similares propiedades y ventajas que QSS.
- Método de primer orden.
- No produce oscilaciones, y sirve para sistemas stiff.

Método de Centered QSS

Cuantificación *Centrada*



CQSS:

- Similares propiedades y ventajas que QSS.
- Método de primer orden.
- Es F-estable y sirve para sistemas marginalmente estables.

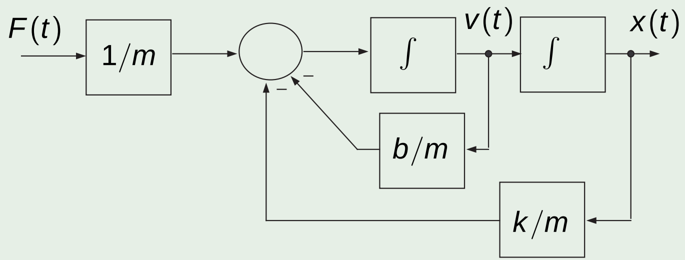
Implementación de los Métodos: PowerDEVS

PowerDEVS es un simulador de DEVS que tiene librerías que implementan los métodos de QSS.

- Es una herramienta libre, totalmente desarrollada en la FCEIA–UNR.
- Tiene un editor gráfico y un motor de simulación DEVS programado en C++.

Ejemplo – Sistema Masa Resorte

Diagrama de Bloques



$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= v(t) \\
\dot{v}(t) &= -\frac{k}{m}x(t) - \frac{b}{m}v(t) + \frac{1}{m}F(t)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Ejemplo – Pelotita Rebotando

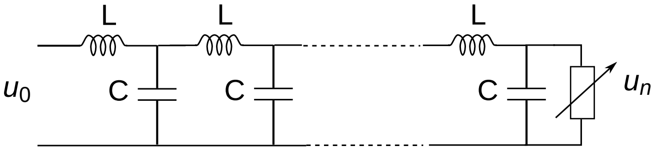
Un modelo simple de una pelota cayendo y rebotando por una escalera es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x \\
\dot{v}_x &= -\frac{b_a}{m} \cdot v_x \\
\dot{y} &= v_y \\
\dot{v}_y &= -g - \frac{b_a}{m} \cdot v_y - s_w \cdot [\frac{b}{m} \cdot v_y + \frac{k}{m}(y - \operatorname{int}(h + 1 - x))]
\end{aligned}$$

donde s_w es 1 en el piso y 0 en el aire. Los eventos de estado se producen cuando:

$$y = \operatorname{int}(h + 1 - x) \tag{21}$$

Ejemplo – Línea de Transmisión



Este modelo de línea de transmisión sin pérdidas es

- Stiff (debido a la carga).
- No Lineal (debido a la carga).
- Marginalmente estable.
- De orden elevado.

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1(t) &= u_0(t) - u_1(t) \\
\dot{u}_1(t) &= \phi_1(t) - \phi_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{\phi}_n(t) &= u_{n-1}(t) - u_n(t) \\
\dot{u}_n(t) &= \phi_n(t) - (10000 \cdot u_n)^3
\end{aligned}$$

Trabajo Actual en el Tema

En el Laboratorio de Sistemas Dinámicos de la FCEIA estamos trabajando actualmente en los siguientes temas relacionados con los métodos de QSS:

- Métodos de QSS para sistemas stiff.
- Simulación de sistemas de electrónica de potencia.
- Implementación de lo métodos en tiempo real.
- Simulación de sistemas de control por redes de comunicación.

Bibliografía Sobre Métodos de QSS

- F. Cellier and E. Kofman.
  Continuous System Simulation.
  Springer, New York, 2006.
- E. Kofman.
  A Second Order Approximation for DEVS Simulation of Continuous Systems.
  Simulation, 78(2):76–89, 2002.
- E. Kofman.
  Discrete Event Simulation of Hybrid Systems.
  SIAM Journal on Scientific Computing, 25(5):1771–1797, 2004.
- E. Kofman and S. Junco.
  Quantized State Systems. A DEVS Approach for Continuous System Simulation.
  Transactions of SCS, 18(3):123–132, 2001.
- B. Zeigler, T.G. Kim, and H. Praehofer.
  Theory of Modeling and Simulation. Second edition.
  Academic Press, New York, 2000.

Bibliografía Sobre Métodos de QSS

- E. Kofman.
  A Third Order Discrete Event Simulation Method for Continuous System Simulation.
  Latin American Applied Research, 36(2):101–108, 2006.
- E. Kofman and B. Zeigler.
  DEVS Simulation of Marginally Stable Systems.
  In *Proceedings of IMACS'05*, Paris, France, 2005.
- G. Migoni, E. Kofman, and F.E. Cellier.
  Integración por Cuantificación de Sistemas Stiff.
  Revista Iberoam. de Autom. e Inf. Industrial, 4(3):97–106, 2007.
- E. Pagliero, M. Lapadula, and E. Kofman.
  PowerDEVS. Una Herramienta Integrada de Simulación por Eventos Discretos.
  In *Proceedings of RPIC'03*, volume 1, pages 316–321, San Nicolas, Argentina, 2003.